

Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування

Юрій Максим'юк ¹, Андрій Козак ², Олександр Максим'юк ³

^{1,2,3}Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037

¹maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0002-5814-6227

²kozak.aa@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0002-3192-1430

³sashamaksymiuk@gmail.com, orcid.org/0000-0002-2367-3086

DOI: 10.32347/2522-4182.4.2019.10-20

Анотація. Отримані розрахункові співвідношення моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням пошкодженості матеріалу для вісесиметричних тіл обертання. Використання чотирикутних скінчених елементів довільної форми з урахуванням змінності компонент метричного тензора забезпечує високу ефективність підходу. Це дозволяє визначати нелінійні деформації та їх варіації через переміщення, при цьому вигляд отримуваних виразів для нелінійних деформацій за формою співпадає зі співвідношеннями для лінійних деформацій. Це реалізується за рахунок відповідного змінення значення компонент тензора перетворень, що дає змогу ефективно розв'язувати задачі в геометрично нелінійній постановці. В якості методу розв'язання системи нелінійних рівнянь прийнято орієнтацію на кроковий алгоритм в поєднанні з ітераційною процедурою Ньютона-Кантаровича.

Ключові слова. Моментна схема скінчених елементів, геометрична нелінійність, термов'язкопружнопластичне деформування, пошкодженості матеріалу.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значна кількість відповідальних елементів конструкцій, що являють собою вісесиметричні тіла обертання, в процесі виготовлення і експлуатації терплять великих формозмінень, які нерідко проходять при підвищених температурах, що призводить до зміни фізико-механічних характеристик матеріалу і розвитку різного виду деформацій. Зважаючи на можливість одночасного виникнення деформацій пластичності і пов-



Максим'юк Юрій

професор кафедри будівельної механіки
д.т.н., доц.



Козак Андрій

асистент кафедри будівельної механіки



Максим'юк Олександр
Студент КНУБА

зучості, обумовлених як наявністю силового навантаження, так і наявністю зовнішніх температурних впливів, визначення несучої здатності цих об'єктів потребує розв'язання задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням пошкодженості матеріалу. Вірогідність розв'язання таких задач механіки деформівного твердого тіла суттєво залежить від адекватності використовуваних фізичних співвідношень розглядуваним процесам деформування матеріалу, зокрема урахуванню наявності великих деформацій та пошкодженості матеріалу.

Метою даної роботи є отримання розрахункових співвідношень (МССЕ) геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності для вісесиметричних тіл обертання з урахуванням пош-

коженості матеріалу.

ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ

При дослідженні геометрично нелінійних задач для вісесиметричних тіл обертання доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву (Лагранжеву).

Розглянемо вісесиметричне тіло (рис.1) в базисній круговій циліндричній системі координат z^i , вісь z^1 яка співпадає з віссю обертання, а z^2 спрямована вздовж радіуса.

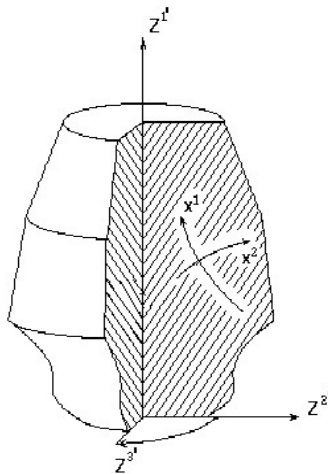


Рис.1. Вісесиметричне тіло в базисній круговій циліндричній системі координат.

Fig.1. An axisymmetric body in a basic circular cylindrical coordinate system

Базисна система координат є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови. В свою чергу місцева система координат x^i призначена для виведення розрахункових співвідношень в границях СЕ.

Опис напружено-деформованого стану об'єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій x^i і актуальній X^i . Повні деформації в актуальній конфігурації визначаються співвідношенням

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(F^{ij} - G^{ij}) \quad (1)$$

де F^{ij} – компоненти міри деформації Фінгера, що дорівнюють відповідним компонентам метричного тензора в початковій

відрахунковій конфігурації g_o^{ij} , $F^{ij} = g_o^{ij}$, де G^{ij} – компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації.

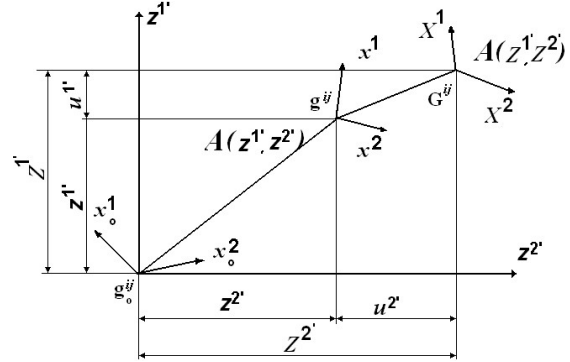


Рис.2. Зміна положення точки відповідно до введеної проміжної відрахункової конфігурації.

Fig.2. Changing the position of a point according to the entered intermediate calculation configuration.

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію x^i (рис.2), компоненти метричного тензора якої позначимо через g^{ij} . Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора був малою величиною порівняно з G^{ij} :

$$\Delta G^{ij} = (G^{ij} - g^{ij}) \ll G^{ij}. \quad (2)$$

Використовуючи перемінну відрахункову конфігурацію представимо деформацію в вигляді суми компонент, обумовлених переходом від початкової відрахункової до перемінної і від перемінної до відрахункової конфігурації:

$$\varepsilon_o^{ij} = \varepsilon^{ij} + \Delta \varepsilon^{ij},$$

де
$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(g_o^{ij} - g^{ij}),$$

$$\Delta \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} - G^{ij}) = -\frac{1}{2}\Delta G^{ij}. \quad (3)$$

Коваріантні компоненти ΔG^{ij} визначаються з умови:

$$G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i. \quad (4)$$

Представимо компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації в відповідності з (2):

$$(g^{ik} + \Delta G^{ik})(g_{kj} + \Delta G_{kj}) - \delta_j^i = 0. \quad (5)$$

Нехтуючи приростом малих величин $\Delta G^{ik} \Delta G_{kj}$, одержуємо :

$$\Delta G^{ik} g_{kj} + \Delta G_{kj} g^{ik} = 0,$$

$$\text{звідси} \quad \Delta G^{ik} = -\Delta G_{kj} g^{ik} g^{il}. \quad (6)$$

Коваріантні компоненти приросту деформацій в актуальній конфігурації відносно перемінної відрахункової дорівнюють:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{kl} &= \Delta \varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta \varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} = \\ &= -\frac{1}{2} \Delta G^{ij} g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl} \end{aligned} \quad (7)$$

На (рис. 2) показано положення деякої точки А, що належать відрахунковій і актуальній конфігурації.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для актуальної і проміжної відрахункової конфігурації відомі компоненти тензора перетворення $z_{,\beta}^{\alpha'}$, і $Z^{\alpha'}$ відповідно, що обумовлюють зв'язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}, \quad Z^{\alpha'} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X_{\beta}}. \quad (8)$$

Подамо компоненти метричного тензора g_{mn} в місцевій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензора базисної декартової системи координат:

$$g_{ij} = z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0,$$

$$g_{3'3'} = (z^{2'})^2, \quad g_{\alpha\beta} = z_{\alpha}^{\nu'} z_{\beta}^{\nu'}, \quad g_{33} = (z^{2'})^2$$

Аналогічно,

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{\nu'} Z_{\beta}^{\nu'}, \quad G_{33} = (Z^{2'})^2. \quad (9)$$

Нове положення точки А в системі $z^{i'}$ визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'}.$$

Диференціюючи по x^i , визначимо компоненти тензора перетворення:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = z_{,\beta}^{\alpha'} + u_{,\beta}^{\alpha'}.$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора $G_{\alpha\beta}$ в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= (z_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'}) (z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}) = \\ &= z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} \end{aligned}$$

$$G_{33} = (z^{2'} + u^{2'})^2. \quad (10)$$

Перепишемо (10) в вигляді :

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta}, \quad G_{33} = g_{33} + \Delta G_{33},$$

$$\text{де} \quad \Delta G_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'},$$

$$\Delta G_{33} = (2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2) \quad (11)$$

Підставляючи (11) в (7), опускаємо в подальшому знак Δ запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних і контраваріантних компонент приросту деформації в проміжній відрахунковій конфігурації:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} (2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2). \quad (12)$$

Згідно прийнятим припущенням, співвідношення (12) справедливе при малих $\Delta \varepsilon_{kl}$ і великих переміщеннях.

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge} &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}), \\ \varepsilon_{33}^{\wedge} &= z^{2'} u^{2'}. \end{aligned} \quad (13)$$

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ

При наявності незворотних деформацій пластичності і повзучості зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається на основі співвідношень теорії пластичного течіння і теорії спрочнення [5]. В цьому випадку прирощення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$ може бути подане сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, прирощень деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$ і прирощень деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$, також температурних $d\varepsilon_{ij}^t$ тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^t. \quad (14)$$

Передбачається, що пружні деформації є малими. Повні напруження σ^{ij} визначаються через компоненти тензора пружних

деформацій відповідно до узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e,$$

$$C^{ijkl} = \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right], \quad (15)$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^i, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^i, T)$, що залежать від температури T :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (16)$$

Температурні деформації малі і визначаються формулою:

$$\varepsilon_{ij}^t = \beta^t T g^{ij}, \quad (17)$$

де $\beta^t = \beta^t(T)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Прирошення пластичних деформацій визначається згідно з асоційованим законом [5]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}, \quad (18)$$

де f_p – функція текучості; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} / 3$ – компоненти девіатора напружень; $\sigma_0 = \sigma_{ii}$:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\mathcal{G}_p, T)]^2 = 0, \quad (19)$$

де $\tau_s(\mathcal{G}_p, T)$ – межа текучості при чистому зсуві; $\mathcal{G}_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ijp}$ – параметр зміцнення Одквіста.

Прирошення деформацій повзучості визначаються на основі теорії зміцнення:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij}, \quad (20)$$

де f_c – функція, що визначає поверхню повзучості:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\mathcal{G}_c, T, \xi_c^i)]^2 = 0; \quad (21)$$

$\sigma_i(\mathcal{G}_c, T, \xi_c^i)$ – межа текучості при чистому зсуві; $\mathcal{G}_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon^{ijc}$ – параметр зміц-

нення Одквіста; $\xi_c^i = \frac{d\varepsilon_c^i}{dt} = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\xi_{ij}^c d\xi_c^{ij}$ –

інтенсивність швидкостей деформацій повзучості.

Тензор деформацій повзучості величина індиферентна. Швидкості деформацій повзучості повинні задовольняти цій властивості. Для цього від тензору деформацій повзучості необхідно визначити об'єктивну похідну за часом. Для отримання індиферентної величини швидкості деформацій повзучості обчислюються об'єктивна похідна Олдройда:

$$\dot{\varepsilon}_c^{cl} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{cl}}{\partial t} \bar{R}_i \bar{R}_j = \dot{\varepsilon}_{ij}^{cl} \bar{R}_i \bar{R}_j,$$

де \bar{R}_i, \bar{R}_j – векторні бази в актуальній конфігурації.

Параметри τ_c, τ_s, ν, E в рівняннях стану (19) і (21) визначаються із дослідів на простий розтяг або стиск циліндричних зразків при різній температурі нагріву деталей і швидкості деформації. Діаграми спрочнення, побудовані в координатах σ^i (інтенсивність напруження) – \mathcal{G}_c (параметр Одквіста, який для одномірного деформування співпадає з інтенсивністю логарифмічної міри деформації ε_i), які показано в роботі [11], достатньо повно характеризують поведінку матеріалу за границями пружності в процесах, що є близькими для простих і супроводжуються великими пластичними деформаціями.

Виконуючи диференціювання виразу (15), встановлюємо взаємозв'язок між прирошеннями напружень і прирошеннями пружних деформацій:

$$d\sigma^{ij} = \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] d\varepsilon_{kl}^e + \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \varepsilon_{kl}^e, \quad (22)$$

де, згідно з формулою (14),

$$d\varepsilon_{kl}^e = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^c - \left(d\varepsilon_{kl}^t - \frac{\partial \beta_T}{\partial T} dT \cdot T \cdot g_{kl} \right).$$

Для визначення прирошень деформацій пластичності скористуємося співвідношеннями (18). Оскільки при пластичному де-

формуванні зображувальна точка залишається на поверхні текучості, то виконується рівність:

$$d f_p = \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \mathcal{G}_p} d \mathcal{G}_p + \frac{\partial f_p}{\partial T} dT. \quad (23)$$

Часткові похідні в рівнянні (23) по s^{ij} , \mathcal{G}_p , T дорівнюють:

$$\frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = s^{ij}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial \mathcal{G}_p} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial T} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial T} \quad (24)$$

Перепишемо співвідношення (23) з урахуванням (24). Оскільки $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$, отримаємо:

$$s_{ij} d\sigma^{ij} - 2\tau_s \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} d \mathcal{G}_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right) = 0. \quad (25)$$

Враховуючи співвідношення (22) і (23), рівняння (25) можна змінити.

Подамо припущення пластичних деформацій відповідно до формули (24). Після відповідних перетворень запишемо вираз λ_p для ізотропного матеріалу:

$$\lambda_p = \frac{2 G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_p dT}{\gamma^p}, \quad (26)$$

де $\gamma_p = 2 G s^{kl} s^{kl} + \frac{4}{3} \sqrt{3} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} =$

$$= 4\tau_s^2 \left(G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathcal{G}_p} \right),$$

$$\beta_p = s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e.$$

Аналогічно визначимо величину скалярного модуля λ_c , що дозволяє обчислити припущення деформацій повзучості:

$$\lambda_c = \frac{2 G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_c dT - \rho_c}{\gamma^c}, \quad (27)$$

де $\beta_c = s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e$

$$\gamma_c = 4\sigma_{ic}^2 \left(G + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_c}{\partial \mathcal{G}_p} \right).$$

Після підставлення значень $d\varepsilon_{kl}^c$ та $d\varepsilon_{kl}^p$ через знайдені λ_c і λ_p в рівняння (22) отримаємо:

$$d\sigma^{ij} = \left\{ \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4 G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times d\varepsilon_{kl} - \left\{ \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - \left(\frac{\beta_c}{\gamma^p} + \frac{\beta_p}{\gamma^c} \right) s^{kl} - \frac{\partial}{\partial T} \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e \right\} dT + \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \frac{\rho_c}{\gamma^c} s_{kl}.$$

Позначивши множник попереду dT через Q^{ij} , а третій складник D^{ij} , отримаємо:

$$d\sigma^{ij} = \left\{ \left[\mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4 G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times d\varepsilon_{kl} + Q^{ij} dT + D^{ij} = d\sigma_{ij}^* - d\sigma_c^{ij}$$

де $d\sigma_{ij}^*$ – припущення напружень, що визначаються з урахуванням залежності фізико-механічних параметрів від розвитку деформацій пластичності і повзучості; $d\sigma_c^{ij} = Q^{ij} dT + D^{ij}$ – припущення напружень, пов'язані зі зміною фізико-механічних характеристик при зміні температури та швидкості деформацій повзучості.

ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ КОНТИНУАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ В УМОВАХ ПОВЗУЧОСТІ ПРИ ТРИВАЛОМУ СТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Процес накопичення деформацій повзучості супроводжується появою в матеріалі мікроскопічних хаотично орієнтованих дефектів. Для урахування їх впливу на несучу здатність матеріалу в роботах [6,7] було запропоновано використовувати феноменологічний параметр пошкодженості, фізичний зміст якого пов'язується із відношенням площі поперечного перерізу дефектів до загальної площі поперечного перерізу тіла.

Цей підхід, що ґрунтується на використанні моделі безперервно-пошкодженого середовища, є переважним. Методологія

розв'язання задач повзучості з використанням феноменологічного параметру пошкодженості стала основою для створення самостійного розділу механіки – континуальної механіки руйнування, що використовується для визначення довговічності елементів конструкцій та встановлює взаємозв'язок між процесом накопичення розсіяних пошкоджень і макроруйнуванням (розвитком тріщин).

При наявності континуального руйнування вираз функції поверхні повзучості (21) набуває вигляду:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\varrho_c, T, \xi_c^i, \omega)]^2 = 0. \quad (28)$$

Зазначене рівняння може бути конкретизоване, наприклад, із застосуванням теорії накопичення пошкоджень Ю.М.Работнова [7]:

$$\xi_c^i = D \left(\frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m, \quad (29)$$

або іншими рівняннями, що враховують наявність пошкодженості матеріалу.

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості вирази вигляду (29) потребують доповнення рівнянням, що описує зміни з часом параметра пошкодженості.

При побудові таких рівнянь припускається, що прирощення функції $\omega(t)$ за малий проміжок часу t залежить від поточного стану матеріалу (значення параметра пошкодженості) та навантажень (силових, деформаційних і температурних впливів) [2, 4 та ін.]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\omega, p_j), \quad (30)$$

де $\Phi(\omega, p_j)$ – деяка функція; p_j – вектор навантажень, що характеризує силові, деформаційні, температурні та інші зовнішні впливи.

Узагальненням цих та подібних рівнянь є наведений в роботах [2] вираз:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta, \quad (31)$$

де $C, C_1 - C_4, B, m, q, k, r, \beta$ – константи матеріалу.

Величина σ_e , що входить до кінетичного рівняння пошкодженості є значенням еквівалентного напруження, обчисленого відповідно до обраного критерію міцності [2], наприклад максимального нормального напруження $\sigma_e = \sigma_1$, інтенсивності дотичних напружень $\sigma_e = \sigma_i$, критерію Г.С.Писаренка – О.О.Лебедева:

$$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{окт}} + (1 - \chi) \sigma_1. \quad (32)$$

Згідно з роботою [2] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення пошкодженості є

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}), \quad (33)$$

де $I_1(\sigma_{ij}), I_2(s_{ij})$ – відповідно перший і другий інваріанти тензора σ_{ij} і девіатора s_{ij} напружень; α, β, γ – константи матеріалу, $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Конкретизація виразу (29) для практичних розрахунків має вигляд:

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_i. \quad (34)$$

Спосіб подання пошкодженості у вигляді скалярної величини є найбільш використовуваним у розрахунковій практиці [6, 7]. Використання скалярного параметра пошкодженості дозволяє проводити чисельні дослідження, використовуючи наявні експериментальні дані про властивості матеріалів.

РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ МСЕ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ.

Для чисельного моделювання процесів термов'язкопружнопластичного деформування вісесиметричних тіл на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою прямокутник довільної форми (рис. 3).

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат

з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2 (рис.4). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

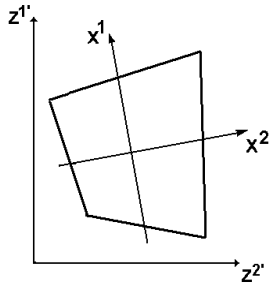


Рис. 3. Вісесиметричний скінчений елемент в базисній системі координат

Fig.3. An axisymmetric finite element in a basic coordinate system

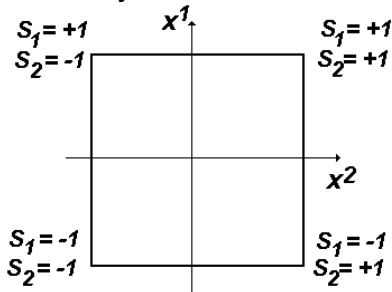


Рис. 4. Вісесиметричний скінчений елемент в місцевій системі координат

Fig. 4. An axisymmetric finite element in the local coordinate system

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталей C^{ijkl} , коефіцієнт температурного розширення α_T та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T \Big|_{x^\alpha=0},$$

$$g = \overset{\circ}{g} = g \Big|_{x^\alpha=0} \quad (35)$$

Розподіл переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right)$$

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \quad (36)$$

$$\left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right)$$

де $u_{m'(S_1 S_2)}, T_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центра поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

Визначимо переміщення та їх похідні в центрі поперечного перетину СЕ, виходячи з прийнятого закону їх розподілу (36):

$$\overset{\circ}{u}_{i'} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)},$$

$$\overset{\circ}{u}_{i',\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_\alpha,$$

$$\overset{\circ}{u}_{i',12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2, \quad (37)$$

Аналогічно, виходячи з (36), визначимо температуру та її похідні в центрі поперечного перетину СЕ:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)},$$

$$\overset{\circ}{T}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_\alpha. \quad (38)$$

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [3, 8] компоненти тензора приросту повних фізичних деформацій для проміжної відрахункової конфігурації у поперечному перетині скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} x^\beta$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}. \quad (39)$$

В випадку лінійного зв'язку між приростом фізичних компонент тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука (15):

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl},$$

$$\text{де } \tilde{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (40)$$

Запишемо вираз для компонент приросту тензора напружень через коефіцієнти розкладу приросту деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \tilde{C}^{ij11} \left(\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{11,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij12} \tilde{\varepsilon}_{12} + \\ & + \tilde{C}^{ij22} \left(\tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\varepsilon}_{22,1} x^1 \right) + \\ & + \tilde{C}^{ij33} \left(\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\varepsilon}_{33,1} x^1 + \tilde{\varepsilon}_{33,2} x^2 \right) \end{aligned}$$

Застосовуючи позначення

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} &= \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \\ \tilde{\sigma}_{,1}^{ij} &= \tilde{C}^{ij22} \tilde{\varepsilon}_{22,1} + \tilde{C}^{ij33} \tilde{\varepsilon}_{33,1} \\ \tilde{\sigma}_{,2}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \tilde{\varepsilon}_{11,2} + \tilde{C}^{ij33} \tilde{\varepsilon}_{33,2} \end{aligned} \quad (41)$$

отримаємо запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} + \tilde{\sigma}_{,2}^{ij} x^2 + \tilde{\sigma}_{,1}^{ij} x^1. \quad (42)$$

Відкидаючи з рівняння (42) члени вигляду $\tilde{\sigma}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як такі, що не дають внеску в енергію деформування елемента, подамо приріст фізичних компонент тензора напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} &= \tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} + \tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \tilde{\sigma}^{12}, \\ \tilde{\sigma}^{33} &= \tilde{\sigma}^{33} + \tilde{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^\alpha \end{aligned} \quad (43)$$

де $\tilde{\sigma}^{ij}$ і $\tilde{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$ – коефіцієнти розкладення приросту напружень.

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент приросту фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням їх подання через компоненти приросту тензора напружень в місцевій системі координат:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha} \tilde{\sigma}^{\alpha\alpha}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = g_{12} \tilde{\sigma}^{12}, \\ \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha} \tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = g_{33} \tilde{\sigma}^{33}, \\ \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{33} &= g_{33} \tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33} \end{aligned} \quad (44)$$

Опис процесу деформування вісесиметричних тіл обертання здійснюється відповідно до варіаційного принципу можливих

переміщень. Рівняння рівноваги системи, що складається з N СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (45)$$

Запишемо приріст варіації енергії деформації одного СЕ у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (46)$$

Подаючи в останньому виразі компоненти приросту тензора напружень і тензора деформацій через їхні значення у центрі елемента (39) (43) подані відповідно до МССЕ, отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left[\left(\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} + \tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)} \right) \times \right. \\ & \times \delta \left(\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2\tilde{\sigma}^{12} \delta \tilde{\varepsilon}_{12} +, \\ & \left. + \left(\tilde{\sigma}^{33} + \tilde{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^\alpha \right) \delta \left(\tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\varepsilon}_{33,\beta} x^\beta \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Обчислимо такі інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 &= 1, \\ \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}. \quad (48)$$

Виконуючи інтегрування виразу (47) з урахуванням (48) для приросту варіації енергії деформації одного СЕ, одержимо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \left[\tilde{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \left(\tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \tilde{\sigma}_{,\alpha}^{33} \delta \tilde{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} \end{aligned} \quad (49)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень і деформацій в ряд

Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \delta W = & \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}^{(3-\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(3-\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(3-\alpha)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}^{33} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \end{aligned}$$

У матричній формі цей вираз буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \delta W = & \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \quad (50) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\}, \\ \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33} \right\} \\ \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}^{33} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{(3-\alpha)3} \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

Коваріантні компоненти тензора приросту нелінійних деформацій в проміжній відрахунковій конфігурації (12) можна співвідношеннями аналогічними за формулою з (13):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\bar{z}_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + \bar{z}_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}^{v'} \right), \quad \varepsilon_{33} = \bar{z}{}^{2'} u^{2'}. \quad (52)$$

де коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}{}^{v'} = z^{v'} + \frac{1}{2} u^{v'}, \quad \bar{z}_{,\beta}{}^{v'} = z_{,\beta}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{v'} \quad (53)$$

Можна показати, що вираз (53) тотожно дорівнює (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\left(z_{,\alpha}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}^{v'} \right) u_{,\beta}^{v'} + \left(z_{,\beta}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{v'} \right) u_{,\alpha}^{v'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} \right). \\ \varepsilon_{33} &= \left(z^{2'} + \frac{1}{2} u^{2'} \right) u^{2'}. \end{aligned}$$

Виразимо вектор деформацій (53) і їх похідних в центрі СЕ через вектор вузлових переміщень:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} &= \left[\bar{B} \right] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} = \left[\bar{B}_1 \right] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \\ \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} &= \left[\bar{B}_2 \right] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad (54) \end{aligned}$$

де

$$\left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u^{1'}_{(s_1, s_2)} \\ u^{2'}_{(s_1, s_2)} \end{matrix} \right\}. \quad (55)$$

Для зручності представлення розділимо матриці $\left[\bar{B} \right], \left[\bar{B}_1 \right], \left[\bar{B}_2 \right]$ на блоки:

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{B} \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B} \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B} \right]^{(+1;+1)} \right] \\ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;+1)} \right] \\ \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;+1)} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;+1)} \right] \end{aligned}$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука (43), матрична форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (56)$$

де, у відповідності із законом Гука (15),

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{D} \right] &= \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2233} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3333} \end{bmatrix}, \\ \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{C}{}^{ij33} \right] \right]. \quad (57) \end{aligned}$$

Компоненти матриці пружних сталей обчислюються із використанням компонент метричного тензора, що відповідають проміжній відрахунковій конфігурації.

Вираз для варіації енергії деформації матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \delta W &= \left(\delta \{u\}^T \left[\overset{\circ}{B} \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \\ &+ \frac{1}{12} \left(\delta \{u\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} \end{aligned}$$

$$= \delta \{u\}^T \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\}$$

де

$$\left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\} = \left[\overset{\circ}{B} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} \quad (58)$$

– вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням повних напружень в актуальній конфігурації.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо лінійний зв'язок між приростом деформацій і приростом переміщень.

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \left(\delta \{u\}^T \right) [K]_n \{u\}_n, \quad (59)$$

де $[K]_n$ – матриця жорсткості вісесиметричного СЕ:

$$[K]_n = \left\{ \left[\overset{\circ}{B} \wedge \right]^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left[\overset{\circ}{B} \wedge \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \wedge \right]^T \left[\overset{\circ}{D}_1 \right] \left[\overset{\circ}{B}_1 \wedge \right] + \right.$$

$$\left. \left. + \left[\overset{\circ}{B}_2 \wedge \right]^T \left[\overset{\circ}{D}_2 \right] \left[\overset{\circ}{B}_2 \wedge \right] \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} \quad (60)$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВОГО ПРИКЛАДУ

З метою доведення ефективності використання розроблених розрахункових співвідношень МССЕ для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням пошкодженості матеріалу для вісесиметричних тіл обертання із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ, розглянуто тестову задачу про згин защемленої по контуру круглої пластини навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис.5).

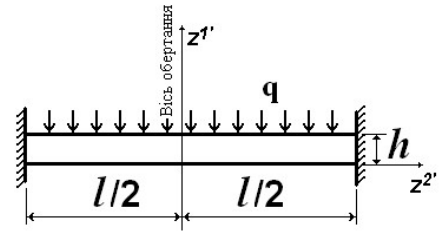


Рис.5. Розрахункова схема круглої пластини.

Fig. 5. The design scheme of the round plate

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $l=0.2$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E=10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$ В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий в роботі [10], що показаний на рис.6 суцільною лінією в вигляді залежності безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження.

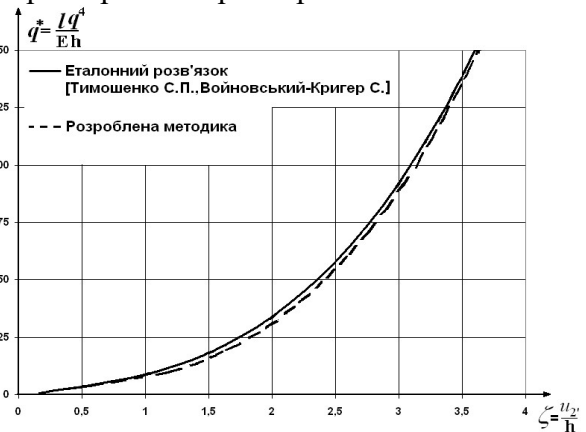


Рис. 6. Залежність безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження.

Fig. 6. Dependence of dimensionless deflection in the center of the plate on dimensionless load parameter.

Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ, із використанням зображеної на рис.5. розрахункової схеми, показані на рис.6 штрих пунктирною, майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

ВИСНОВКИ

Отримані розрахункові співвідношення МСЕ – вирази матриці жорсткості (60) і вектору вузлових реакцій (58) – для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням пошкодженості матеріалу вісесиметричних тіл. Розв'язання тестової задачі засвідчило вірогідність отримуваних результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Блох В.И.** Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та. - 1964. – 483с.
2. **Голуб В.П.** Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикладная механика. – 2000. – №3. – С.31–66.
3. **Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М.** Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования// Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
4. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник. / **Под ред. Шестерикова С.А.**-М.:Машиностроение,1983.-101 с.
5. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. **Качанов Л.М.** Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1969. – 420 с.
7. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. - М.: 1966. – 752 с.
8. **Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др.** Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
9. **Сахаров А.С.** Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. –1974. –Вып.24. –С.147-156.
10. **Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С.** Пластинки и оболочки. – М.: Наука,1966.- 456 с.
11. **Тормахов М.Н.** О связи между напряжениями и конечными пластическими деформациями при простом нагружении в пространстве истинных напряжений // Рук. деп. ВИНТИ №7899-В. – 13 с.

REFERENCES

1. **Bloch V.I.** Elasticity theory. - Kharkov: Kharkov Publishing House. Universities. - 1964. - 483с.
2. **Golub V.P.** Nonlinear mechanics of continuous damage and its application to the problems of creep and fatigue // Applied mechanics. - 2000. - №3. - P.31–66.
3. **Gulyar A.I., Sakharov A.S., Blacky S.M.** The convergence of a moment scheme of a finite element method in problems of elastic and plastic axisymmetric deformation // Materials resistance and structural theory. - 1978, №32 - p.3-10.
4. Patterns of creep and long-lasting strength. Directory. / Ed. **Shesterikova S.A.** -M.: Mechanical Engineering, 1983.-101 p.

5. **Kachanov L.M.** Basics of plasticity theory. - M.: Fizmatgiz, 1960. - 456 p.
6. **Kachanov L.M.** Creep theory. - M.: Fizmatgiz, 1969. - 420 p.
7. **Rabotnov Yu.N.** Creep of structural elements. - M.: 1966. - 752 p.
8. **Sakharov A.S., Kislooki V.N., Kirichevsky V.V.** Finite element method in solids mechanics. - Kiev: High School, 1982.- 479p.
9. **Sakharov A.S.** Instantaneous scheme of finite element MSKE with allowance for rigid displacements // Materials resistance and structural theory. –1974. –No.24. –S.147-156.
10. **Tymoshenko S.P., Voynovsky-Krieger S.** Plates and shells. - M.: Science, 1966.-456 p.
11. **Tormakhov M.N.** On the relationship between stresses and finite plastic deformations under simple loading in the space of true stresses // Hand. Dep. GUILTY №7899-B. - 13 p.

Finite element moment diagram of solvation of thermoplastic elastic deformation problems

Yurii Maksymiuk, Andrii Kozak,
Oleksandr Maksymiuk

Summary. The calculated finite element moment diagram (MSEC) for the solution of geometrically nonlinear problems of thermoplastic elasticity with regard to material damage for axisymmetric rotation bodies was obtained. The use of quadrilateral finite elements of arbitrary shape, taking into account the variability of the components of the metric tensor, provides high efficiency of the approach. This allows us to determine nonlinear deformations and their variations due to displacement, whereby the form of the obtained expressions for nonlinear deformations in shape coincides with the relations for linear deformations. This allows us to determine nonlinear deformations and their variations due to displacement, whereby the form of the obtained expressions for nonlinear deformations in shape coincides with the relations for linear deformations. This is realized by changing the value of the transformation tensor components accordingly, which enables us to effectively solve problems in a geometrically nonlinear formulation. The method of solving the system of nonlinear equations is the orientation of the step algorithm in combination with the iterative procedure of Newton-Kantorovich.

Key words. Finite element moment diagram, physical and geometric nonlinearity, thermally elastic plastic deformation, material damage, axisymmetric rotation bodies.